

Kodowanie i kompresja danych

Lista nr 6, zadanie 1

Bartosz Chodorowski <166142@student.pwr.wroc.pl>

Wrocław, 15 czerwca 2009

Zadanie

Chcemy kodować obrazy metodą DPCM używając predyktora postaci

$$\hat{x}_{i,j} = ax_{i,j-1} + bx_{i-1,j}$$

Znajdź równania które należy rozwiązać, aby otrzymać współczynniki a i b , minimalizując błąd średniokwadratowy.

Rozwiązanie

Chcemy zminimalizować błąd średniokwadratowy:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[(x_{i,j} - \hat{x}_{i,j})^2] \\ &= E[(x_{i,j} - (ax_{i,j-1} + bx_{i-1,j}))^2]\end{aligned}$$

Przyrównujemy więc do zera pochodną cząstkową wyznaczoną względem a :

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial \sigma^2}{\partial a} &= -2E[(x_{i,j} - (ax_{i,j-1} + bx_{i-1,j}))x_{i,j-1}] \\ 0 &= E[(x_{i,j} - (ax_{i,j-1} + bx_{i-1,j}))x_{i,j-1}]\end{aligned}$$

Korzystając z własności (liniowości) wartości oczekiwanej otrzymujemy:

$$\begin{aligned}E[x_{i,j}x_{i,j-1}] &= E[(ax_{i,j-1} + bx_{i-1,j})x_{i,j-1}] \\ E[x_{i,j}x_{i,j-1}] &= aE[x_{i,j-1}x_{i,j-1}] + bE[x_{i-1,j}x_{i,j-1}]\end{aligned}$$

Postępujemy analogicznie operując na pochodnej względem parametru b :

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial \sigma^2}{\partial b} &= -2E[(x_{i,j} - (ax_{i,j-1} + bx_{i-1,j}))x_{i-1,j}] \\
0 &= E[(x_{i,j} - (ax_{i,j-1} + bx_{i-1,j}))x_{i-1,j}] \\
E[x_{i,j}x_{i-1,j}] &= E[(ax_{i,j-1} + bx_{i-1,j})x_{i-1,j}] \\
E[x_{i,j}x_{i-1,j}] &= aE[x_{i,j-1}x_{i-1,j}] + bE[x_{i-1,j}x_{i-1,j}]
\end{aligned}$$

Błąd średniokwadratowy osiąga minimum wtedy, gdy obie obliczone pochodne się zerują, zatem chcemy obliczyć parametry a i b z poniższego układu równań:

$$\begin{cases} E[x_{i,j}x_{i,j-1}] = aE[x_{i,j-1}x_{i,j-1}] + bE[x_{i-1,j}x_{i,j-1}] \\ E[x_{i,j}x_{i-1,j}] = aE[x_{i,j-1}x_{i-1,j}] + bE[x_{i-1,j}x_{i-1,j}] \end{cases}$$