

Sprawozdanie z obliczeń naukowych i metod numerycznych

lista 3, zadanie 3

Bartosz Chodorowski <166142@student.pwr.wroc.pl>

Wrocław, 21 grudnia 2009

1 Treść zadania

Oblicz macierz odwrotną A^{-1} stopnia n następującymi metodami:

- Rozwiąż układ równań $Ax_j = e_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), gdzie e_j jest j -tą kolumną macierzy jednostkowej stopnia n . Rozwiązanie x_j tego układu jest j -tą kolumną macierzy odwrotnej. Zastosuj polecenie MATLABa \ do rozwiązywania układów.
- Rozwiąż układy równań liniowych z poprzedniego punktu za pomocą eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego. Napisz własną implementację eliminacji Gaussa. Zwróć uwagę na wielkość czynników wzrostu n oraz na moduły elementów głównych.
- Oblicz macierz odwrotną A^{-1} za pomocą `inv`.
- Testy wykonaj dla kilku typów macierzy A , np. dla macierzy Hilberta i macierzy symetrycznej dodatnio określonej Lehmera:

$$a_{ij} = i/j \quad \text{dla } j \geq i.$$

Macierz odwrotna do macierzy Lehmera jest trójkątniowa. Zwróć uwagę na to, czy odpowiednie elementy obliczonej numerycznie macierzy są bliskie zero. Jak bliskie? Czemu się równa z MATLABie epsilon maszynowe? Czy wybór elementu głównego w eliminacji Gaussa poprawia wyniki?

Dokładność obliczonych numerycznie macierzy odwrotnych oceń na podstawie następujących wyrażeń:

$$\|AX - I\|/\|A\|, \quad \|XA - I\|/\|A\|,$$

gdzie X oznacza numerycznie obliczoną macierz odwrotną. Staraj się znaleźć takie macierze A , aby powyższe dwa wyrażenia miały istotnie różne wartości. Zbadaj wrażliwość macierzy odwrotnej na zaburzenia elementów macierzy A . Wzoruj się na wskazówkach z poprzednich zadań. Koniecznie obliczaj wskaźniki uwarunkowania $\text{cond}(A)$ oraz $\det(A)$, $\|A\|$, $\|A^{-1}\|$.

2 Wstęp teoretyczny

Celem zadania jest obliczanie macierzy odwrotnej za pomocą różnych metod, w tym eliminacji Gaussa.

Macierzą odwrotną macierzy kwadratowej A nazywamy taką macierz A^{-1} , że $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, gdzie I jest macierzą jednostkową.

Kwadratowa norma macierzowa dana jest wzorem:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

Za jej pomocą możemy określać, jak bardzo macierze „różnią się” między sobą. Niech A, B będą macierzami. Wówczas $\|A - B\|/\|A\|$ jest tym mniejsze im macierze A, B mają „podobne” wyrazy. Zatem normy $\|XA - I\|/\|A\|$ oraz $\|AX - I\|/\|A\|$ (gdzie X jest macierzą odwrotną do A obliczoną z pewnym błędem) są miarą błędu numerycznego obliczania macierzy odwrotnej.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy A dany jest wzorem: $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Do jego obliczania służy funkcja `cond()`.

Eliminacją Gaussa nazywamy następujący algorytm:

```
input n, (aij), (bi)
1.   for k = 1 to n - 1 do
2.       for i = k + 1 to n do
3.           z ← aik/akk
4.           aik ← 0
5.           for j = k + 1 to n do
6.               aij ← aij - zakj
7.           end do
8.       end do
9.   end do
10.  for i = n to 1 step -1 do
11.      xi ← (bi - ∑j=i+1n aijxj)/aii
12.  end do
output (xi)
```

3 Wyniki

W ramach rozwiązania zadania użyto oprogramowania `octave`. Napisany program dał wyniki, których najważniejsze części zawiera poniższy listing:

```
=====
Macierz hilb(10)
cond(A):
  1.6025e+13
det(A):
  2.1644e-53
norm(A):
  1.7519
----- Metoda inv -----
Analiza wyników:
||AX-I|| / ||A||:
  0.0025987
||XA-I|| / ||A||:
  0.0025987
norm(invA):
  9.1478e+12
```

```

----- Metoda rownan liniowych \ -----
Analiza wyników:
||AX-I|| / ||A||:
  6.5019e-05
||XA-I|| / ||A||:
  0.0062636
norm(invA):
  9.1473e+12

----- Metoda rownan liniowych Gaussa -----
Analiza wyników:
||AX-I|| / ||A||:
  7.3242e-05
||XA-I|| / ||A||:
  0.0055895
norm(invA):
  9.1466e+12

=====
Macierz lehmer(10)
cond(A):
  86.389
det(A):
  4.9721e-05
norm(A):
  5.7585
----- Metoda inv -----
Analiza wyników:
||AX-I|| / ||A||:
  8.0536e-16
||XA-I|| / ||A||:
  8.0536e-16
norm(invA):
  15.002

----- Metoda rownan liniowych \ -----
Analiza wyników:
||AX-I|| / ||A||:
  6.3892e-16
||XA-I|| / ||A||:
  1.7441e-15
norm(invA):
  15.002

----- Metoda rownan liniowych Gaussa -----
Analiza wyników:
||AX-I|| / ||A||:
  6.2426e-16
||XA-I|| / ||A||:
  1.0456e-15
norm(invA):
  15.002

```

3.1 Wnioski

Eliminacja Gaussa daje względnie dobre wyniki. Widać to po obliczonych wskaźnikach $\|AX - I\|/\|A\|$ oraz $\|XA - I\|/\|A\|$. Oczywiście nie są one równe, gdyż mnożenie macierzy nie jest przemienne. Z reguły pierwszy

z tych parametrów jest mniejszy, gdyż użyte algorytmy są użyte do rozwiązywania układów równań postaci $Ax = c$, gdzie c jest jakimś wektorem.

Eliminacja Gaussa zawodzi, gdy jakiś z elementów głównych a_{kk} będzie wynosił zero. Powodem jest próba dzielenia przez zero. Poniżej znajduje się przykład trywialnego układu równań, z którym rozważana metoda nie jest w stanie sobie poradzić:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Oczywistym jest, że rozwiązaniem jest $x_1 = x_2 = 1$, jednak w wyniku otrzymujemy wartości NaN (z powodu dzielenia przez zero).

Algorytm zawodzi również w przypadku gdy zamiast zera zostanie wstawiona bardzo mała, dodatnia liczba ε . Algorytm Gaussa udziela wówczas odpowiedzi $x_2 = 1$ i w konsekwencji $x_1 = 0$. Prawdziwe rozwiązania są jednak inne:

$$x_1 = \frac{1}{1 - \varepsilon} \approx 1, \quad x_2 = \frac{1 - 2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \approx 1$$

Aby zapobiec powyższemu negatywnemu zjawiskom, należałoby użyć zmodyfikowanej wersji algorytmu zwanej „eliminacją Gaussa z wyborem elementu głównego”. Daje ona na ogół dokładniejsze rozwiązania niż podstawowa wersja eliminacji Gaussa.

Macierz odwrotna do macierzy Lehmera jest trójkątowa. Jednak wskutek obliczeń numerycznych popełniane są błędy, wobec czego obliczone odpowiednie wyrazy nie są dokładnie równe zero.