

Sprawozdanie z obliczeń naukowych i metod numerycznych

lista 4 (interpolacja), zadanie 2

Bartosz Chodorowski <166142@student.pwr.wroc.pl>

Wrocław, 15 stycznia 2010

1 Treść zadania

Zbadać zbieżność wielomianów interpolacyjnych dla następujących funkcji interpolowanych:

- $f(x) = x + \sin(2x)$, $x \in [-2, 1]$,
- $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$,
- $f(x) = 1/(1+x^2)$, $x \in [-5, 5]$.
- jakaś inna funkcja.

Wybrać węzły równoodległe i węzły Czebyszewa.

2 Wstęp teoretyczny

Problem interpolacji wielomianowej zdefiniowany jest następująco: znaleźć wielomian p możliwie najniższego stopnia taki, że dla danych $n+1$ punktów (x_i, y_i) zachodzi:

$$p(x_i) = y_i \quad (0 \leq i \leq n)$$

Mówi się, że wielomian p **interpoluje** wartości y_k w węzłach x_k . Jeśli są to wartości pewnej funkcji f , to mówi się też, że p interpoluje f .

Ponadto, przyjęto oznaczenia: niech Π_n będzie zbiorem wielomianów co najwyżej n -tego stopnia oraz $\hat{\Pi}_n$ zbiorem wielomianów stopnia n , o współczynniku wiodącym równym 1, to znaczy:

$$\hat{\Pi}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \Pi_n : w(x) = x^n + \dots\}$$

Można pokazać, że jeśli liczby $x_0, x_1, \dots, x_n$ są parami różne, to istnieje dokładnie jeden wielomian $p \in \Pi_n$ taki, że:

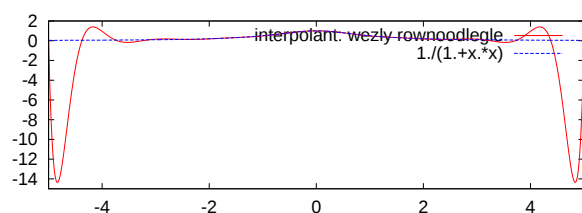
$$p(x_i) = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq n)$$

Można również oszacować błąd – odchylenie wielomianu interpolacyjnego od funkcji interpolowanej. Jeśli $f \in C^{n+1}[a, b]$, a wielomian $p \in \Pi_n$ interpoluje wartości funkcji f w $n + 1$ różnych punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ przedziału $[a, b]$, to dla każdego $x \in [a, b]$ istnieje takie $\xi_x \in (a, b)$, że:

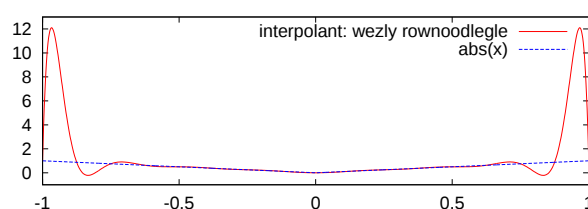
$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (1)$$

3 Wyniki

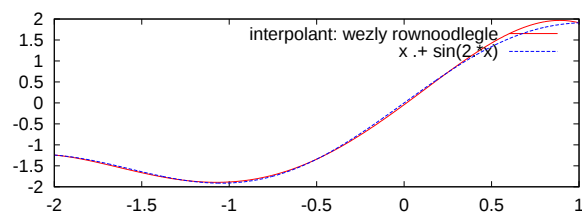
W ramach wykonania zadania napisano skrypt przy użyciu programu `octave`, otrzymując następujące wyniki:



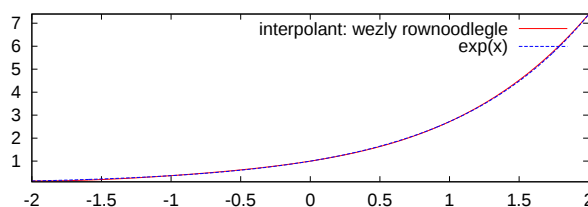
(a) $1/(1+x^2)$ dla $n = 17$



(b) $|x|$ dla $n = 17$



(c) $x + \sin(2x)$ dla $n = 5$



(d) e^x dla $n = 5$

1	1 / (1+x^2) :			
2	n= 1: równomierne :	0.961513	Chebyszewa :	0.961538
3	n= 2: równomierne :	0.961513	Chebyszewa :	0.925901
4	n= 3: równomierne :	0.646229	Chebyszewa :	0.600598
5	n= 4: równomierne :	0.706989	Chebyszewa :	0.750275
6	n= 5: równomierne :	0.43835	Chebyszewa :	0.402015
7	n= 6: równomierne :	0.432669	Chebyszewa :	0.555887
8	n= 7: równomierne :	0.616926	Chebyszewa :	0.264225
9	n= 8: równomierne :	0.247338	Chebyszewa :	0.391718

10	n= 9: równomierne:	1.04517	Czebyszewa:	0.17083
11	n=10: równomierne:	0.300285	Czebyszewa:	0.269158
12	n=11: równomierne:	1.91563	Czebyszewa:	0.109154
13	n=12: równomierne:	0.556729	Czebyszewa:	0.182741
14	n=13: równomierne:	3.66293	Czebyszewa:	0.069209
15	n=14: równomierne:	1.07005	Czebyszewa:	0.123382
16	n=15: równomierne:	7.19232	Czebyszewa:	0.046601
17	n=16: równomierne:	2.10686	Czebyszewa:	0.0830943
18	n=17: równomierne:	14.3868	Czebyszewa:	0.032609
19	n=18: równomierne:	4.22336	Czebyszewa:	0.055897
20	n=19: równomierne:	29.1862	Czebyszewa:	0.0224922
21	n=20: równomierne:	8.57536	Czebyszewa:	0.0375819
22				
23	x :			
24	n= 1: równomierne:	0.998999	Czebyszewa:	1
25	n= 2: równomierne:	0.998999	Czebyszewa:	0.706106
26	n= 3: równomierne:	0.25	Czebyszewa:	0.216506
27	n= 4: równomierne:	0.249	Czebyszewa:	0.269598
28	n= 5: równomierne:	0.147199	Czebyszewa:	0.123175
29	n= 6: równomierne:	0.139626	Czebyszewa:	0.171546
30	n= 7: równomierne:	0.181941	Czebyszewa:	0.0866547
31	n= 8: równomierne:	0.0966575	Czebyszewa:	0.12645
32	n= 9: równomierne:	0.315752	Czebyszewa:	0.0669751
33	n=10: równomierne:	0.0737701	Czebyszewa:	0.100248
34	n=11: równomierne:	0.663545	Czebyszewa:	0.0546215
35	n=12: równomierne:	0.108661	Czebyszewa:	0.0830543
36	n=13: równomierne:	1.57448	Czebyszewa:	0.0461317
37	n=14: równomierne:	0.222851	Czebyszewa:	0.0708829
38	n=15: równomierne:	4.06078	Czebyszewa:	0.0399347
39	n=16: równomierne:	0.505221	Czebyszewa:	0.0618052
40	n=17: równomierne:	11.1312	Czebyszewa:	0.035209
41	n=18: równomierne:	1.23476	Czebyszewa:	0.0547711
42	n=19: równomierne:	31.9697	Czebyszewa:	0.0314859
43	n=20: równomierne:	3.1953	Czebyszewa:	0.0491584
44				
45	x+sin(2x):			
46	n= 1: równomierne:	3.82252	Czebyszewa:	3.25077
47	n= 2: równomierne:	1.81886	Czebyszewa:	1.33995
48	n= 3: równomierne:	0.910248	Czebyszewa:	0.654117
49	n= 4: równomierne:	0.442053	Czebyszewa:	0.290119
50	n= 5: równomierne:	0.138839	Czebyszewa:	0.0779026
51	n= 6: równomierne:	0.0520529	Czebyszewa:	0.0230884
52	n= 7: równomierne:	0.0118374	Czebyszewa:	0.00419215
53	n= 8: równomierne:	0.00362479	Czebyszewa:	0.000966676
54	n= 9: równomierne:	0.000637146	Czebyszewa:	0.000130136
55	n=10: równomierne:	0.000165063	Czebyszewa:	2.48216e-05
56	n=11: równomierne:	2.35413e-05	Czebyszewa:	2.63813e-06
57	n=12: równomierne:	5.28989e-06	Czebyszewa:	4.30234e-07
58	n=13: równomierne:	6.33254e-07	Czebyszewa:	3.77133e-08
59	n=14: równomierne:	1.2569e-07	Czebyszewa:	5.37846e-09
60	n=15: równomierne:	1.29497e-08	Czebyszewa:	4.00793e-10
61	n=16: równomierne:	2.30215e-09	Czebyszewa:	5.08209e-11
62	n=17: równomierne:	2.07897e-10	Czebyszewa:	3.29181e-12
63	n=18: równomierne:	3.33209e-11	Czebyszewa:	3.76144e-13
64	n=19: równomierne:	2.43383e-12	Czebyszewa:	2.17604e-14
65	n=20: równomierne:	8.59091e-13	Czebyszewa:	3.9968e-15
66				
67	e^x:			
68	n= 1: równomierne:	7.25372	Czebyszewa:	6.38906
69	n= 2: równomierne:	3.02816	Czebyszewa:	2.47427
70	n= 3: równomierne:	0.855997	Czebyszewa:	0.675113
71	n= 4: równomierne:	0.210596	Czebyszewa:	0.148183

72	n= 5: równomierne:	0.0458367	Czebyszewa:	0.0270749
73	n= 6: równomierne:	0.00888191	Czebyszewa:	0.0042232
74	n= 7: równomierne:	0.00154319	Czebyszewa:	0.000573578
75	n= 8: równomierne:	0.000242252	Czebyszewa:	6.89009e-05
76	n= 9: równomierne:	3.46194e-05	Czebyszewa:	7.4138e-06
77	n=10: równomierne:	4.53343e-06	Czebyszewa:	7.2204e-07
78	n=11: równomierne:	5.47355e-07	Czebyszewa:	6.42029e-08
79	n=12: równomierne:	6.12729e-08	Czebyszewa:	5.25058e-09
80	n=13: równomierne:	6.38941e-09	Czebyszewa:	3.97413e-10
81	n=14: równomierne:	6.23371e-10	Czebyszewa:	2.79909e-11
82	n=15: równomierne:	5.7141e-11	Czebyszewa:	1.84386e-12
83	n=16: równomierne:	4.86455e-12	Czebyszewa:	1.13687e-13
84	n=17: równomierne:	3.7037e-13	Czebyszewa:	8.88178e-15
85	n=18: równomierne:	6.57252e-14	Czebyszewa:	1.77636e-15
86	n=19: równomierne:	2.33591e-13	Czebyszewa:	1.77636e-15
87	n=20: równomierne:	3.5616e-13	Czebyszewa:	2.66454e-15

Liczby przedstawione w powyższym listingu przybliżają błąd aproksymacji, to znaczy wartość

$$\|f - p\|_{[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|$$

gdzie a, b są końcami przedziału na którym dokonujemy aproksymacji, f jest daną aproksymowaną funkcją, p jest otrzymanym wielomianem aproksymującym.

4 Wnioski

W ogólnym przypadku wzrost ilości węzłów powoduje wzrost dokładności aproksymacji. Rysunki (c) oraz (d) dobrze pokazują zaistniałą sytuację – dla 5 węzłów wykresy niemal pokrywają się, na listingu widać natomiast, że dla większych wartości n błąd jest jeszcze mniejszy.

Rysunki (a) oraz (b) prezentują tak zwane **zjawisko Rungego**¹. Okazuje się, że przy dużej ilości równo-odległych węzłów, wielomian interpolacyjny ma poważne kłopoty z aproksymacją niektórych funkcji. Zachowanie wielomianu wynika z faktu, iż jest on dużego stopnia, zatem na krańcach rozpatrywanych przedziałów chce szybko „ucieć” do nieskończoności, podczas gdy musi przeciąć się z interpolowaną funkcją w wyznaczonych węzłach.

Aby uniknąć efektu Rungego, stosuje się **węzły Czebyszewa**². Rozmieszczone są one gęściej przy krańcach przedziału, co uniemożliwia tak gwałtowne oscylacje wielomianu. Można udowodnić, że rozmieszczenie węzłów właśnie w ten sposób minimalizuje ostatni iloczyn ze wzoru (1):

$$\prod_{i=0}^n (x - x_i) \in \hat{\Pi}_n$$

czyniąc węzły Czebyszewa optymalnymi.

Przy dużych ilościach węzłów większe niedokładności wynikają z błędów numerycznych. Można poznać to między innymi po tym, że wielomian nie przecina się z interpolowaną funkcją tak często jak powinien.

Warto również zauważyć, że dla funkcji zaprezentowanych na rysunkach (a) i (b), dla parzystych ilości węzłów dobranych metodą Czebyszewa interpolacja daje odrobinę gorsze wyniki niż dla ilości nieparzystych. Wynika to z tego, że środek przedziału (znajdujący się w maksimum) jest węzłem, gdy dysponujemy nieparzystą ilością węzłów, a to korzystnie wpływa na aproksymację. Dla węzłów równoodległych sytuacja jest odwrotna – nieparzysta ich ilość powoduje wzmocnienie efektu Rungego.

¹Carl David Tolmé Runge, niemiecki matematyk i fizyk (30 sierpnia 1856 – 3 stycznia 1927)

²Pafnutij Lwowicz Czebyszew, ros. Пафнутий Львович Чебышёв, rosyjski matematyk (16 maja 1821 – 8 grudnia 1894)