

Lista 4 zadanie 4

Teoria złożoności i złożoność obliczeniowa 2011

Bartosz Chodorowski <166142@student.pwr.wroc.pl>

Wrocław, 28 czerwca 2011

1 Treść zadania

Zdecyduj czy następujący problem jest rekurencyjny: czy maszyna Turinga M kiedykolwiek pisze symbol różny od aktualnie czytanego? (czy zmienia cokolwiek na taśmie?) Czy jest on rekurencyjnie przeliczalny?

2 Rozwiązanie

Język zdefiniowany przez powyższy problem nazwijmy przez L . Rozważmy dopełnienie tego języka $\bar{L}$, to znaczy $\bar{L} = \{M : M \text{ nie zmienia nic na taśmie dla żadnego słowa wejściowego}\}$. $M = (Q, \Sigma, \delta, S)$ jest maszyną Turinga, $|Q| = m$, na taśmie na wejściu znajduje się słowo $x_0, \dots, x_{n-1}$.

Lemat 1 *Maszyna M zapisze coś innego niż przeczytała na taśmie, albo zapętli się po $(2m + n)m$ krokach.*

Dowód

Wynika to z faktu, że jeśli maszyna nic nie będzie pisać na taśmie, to:

- nie może wyjść dalej niż m blanków poza czytane słowo – jeśli ma być niezapętłona, to musi „wiedzieć”, że ma zawrócić i wrócić z powrotem do słowa,
- jeśli będzie chodzić po $x_0, \dots, x_{n-1}$, to na maksymalnie n kroków wykorzysta jeden stan,
- jeśli maszyna się zapętli, wcześniej nic nie zapisawszy na taśmie, to wiadomo, że później już nic nie zapisze.

□

Lemat 2 *Jeżeli maszyna M nie zmienia nic na taśmie dla żadnych słów o długości $\leq 2^m$, to nie zmienia nic na taśmie dla żadnego słowa wejściowego.*

□

Stwórzmy więc maszynę $M'(M; x)$, która symuluje zadaną maszynę $M(x)$ wykonując rozkazy krok po kroku sprawdzając, czy maszyna zmienia coś na taśmie i zliczając ilość wykonanych kroków. Jeśli symbol na taśmie uległ zmianie, zwracamy „Tak”. Jeżeli po $(2m + n)m$ krokach maszyna nie zmieniła nic na taśmie, zwracamy „Nie”. Maszyna $M'(M; x)$ rozstrzyga więc, czy maszyna M zmienia coś na słowie x (jej poprawność zapewnia lemat 1).

Rozważmy teraz maszynę $M''(M)$, która dla wszystkich możliwych słów y o długości $\leq 2^m$ oblicza $M'(M; y)$. Jeśli dla któregośkolwiek y wynikiem $M'(M; y)$ jest „Tak”, to zwracamy „Nie”. W przeciwnym przypadku, zwracamy „Tak”. Maszyna $M''(M)$ rozstrzyga więc język $\bar{L}$ (na podstawie lematu 2).

Na podstawie powyższych rozważań i faktu, że języki rekurencyjne są zamknięte na domknięcie, wnioskujemy, że L jest językiem rekurencyjnym (jest więc również rekurencyjnie przeliczalny).