

NP-zupełność i redukcje

Bartosz Chodorowski <166142@student.pwr.wroc.pl>

Wrocław, 24 czerwca 2011

1 Definicje problemów

3-SAT

Instancja: Formuła ϕ w postaci CNF, gdzie w każdej klauzuli występują dokładnie 3 literały.

Pytanie: Czy ϕ jest spełnialna?

HITTING SET:

Instancja: Kolekcja C podzbiorów skończonego zbioru S oraz naturalna liczba k .

Pytanie: Czy S zawiera hitting set dla C o rozmiarze k lub mniejszym, to znaczy podzbiór S' zbioru S taki, że $|S'| \leq k$ i taki, że S' zawiera co najmniej jeden element z każdego zbioru w C ?

VERTEX COVER

Instancja: Graf $G = (V, E)$, dodatnia liczba całkowita k .

Pytanie: Czy G ma pokrycie wierzchołkowe o rozmiarze co najwyżej k , to znaczy podzbiór U zbioru V taki, że $(\forall \{v_1, v_2\} \in E)(v_1 \in U \vee v_2 \in U)$, $|U| \leq k$?

HAMILTON CYCLE

Instancja: Graf $G = (V, E)$, gdzie $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Pytanie: Czy istnieje permutacja Π zbioru V taka, że dla każdego $1 \leq i \leq n$ zachodzi $\{v_{\Pi(i)}, v_{\Pi(i+1)}\} \in E$, gdzie przez $\Pi(n+1)$ rozumiemy $\Pi(0)$?

TSP(D)

Instancja: Graf pełny $G = (V, E)$, funkcja $f : E \rightarrow \mathbb{N}$ oraz liczba $k \in \mathbb{N}$.

Pytanie: Czy istnieje permutacja Π zbioru V taka, że $\sum_{i=1}^n f(v_{\Pi(i)}, v_{\Pi(i+1)}) \leq k$, gdzie przez $\Pi(n+1)$ rozumiemy $\Pi(0)$?

2 Zadania

Zadanie: Pokaż, że problem HITTING SET jest NP-zupełny.

Rozwiązanie: Zredukujemy problem VERTEX COVER do problemu HITTING SET.

Redukcja 1: VERTEX COVER do HITTING SET

Wejście: Graf $G = (V, E)$, liczba naturalna k_1

Wyjście: Zbiór S , kolekcja C podzbiorów S , liczba naturalna k_2

```

1  $k_2 := k_1$ 
2  $S := V$ 
3  $C := \emptyset$ 
4 for  $\{v_1, v_2\} \in E$  do
5    $C := C \cup \{\{v_1, v_2\}\}$ 

```

Łatwo zauważyć, że redukcja 1 odbywa się w pamięci logarytmicznej.

Założmy, że S zawiera hitting set S' dla C o rozmiarze k_2 lub mniejszym. $U = S'$ jest więc dobrym pokryciem wierzchołkowym grafu G , gdyż każda para $\{v_1, v_2\} \in C$ reprezentuje krawędź w grafie G .

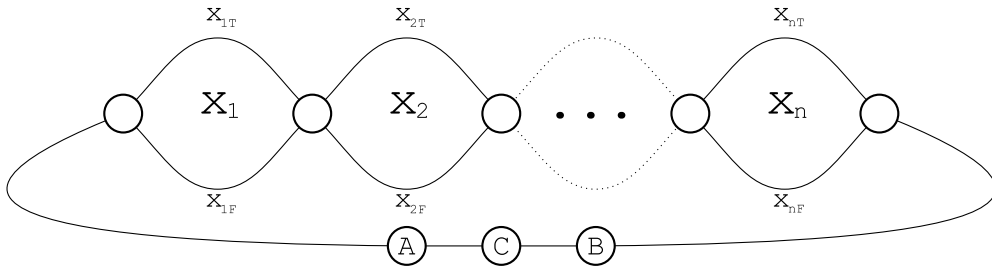
Założmy, że G ma pokrycie wierzchołkowe U . Wówczas $S' = U$ jest hitting setem dla kolekcji C (wszystkich par wierzchołków połączonych krawędziami).

□

Zadanie: Pokaż, że problem HAMILTON CYCLE jest NP-zupełny.

Rozwiązanie: Zredukujemy problem 3-SAT do problemu HAMILTON CYCLE.

Założmy, że w formule ϕ występuje n zmiennych: $x_1, \dots, x_n$. Tworzymy więc graf pokazany na rysunku 1, który będzie podgrafem docelowego grafu G .

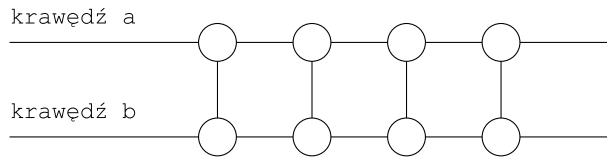


Rysunek 1: Podgraf grafu G stworzony dla każdej zmiennej występującej w ϕ .

Musimy również zdefiniować konstrukcję łączenia dwóch krawędzi „w wykluczający się sposób”. Rysunek 2 pokazuje wykluczające połączenie krawędzi a z krawędzią b . Dodanie wierzchołków w ten sposób powoduje, że przebieg ścieżki Hamiltona przez jedną z krawędzi wymusza wyjście po tej samej stronie i uniemożliwia ponowne przejście przez drugą krawędź.

Ponadto dla każdej klauzuli $C_i = l_1 \vee l_2 \vee l_3$ występującej w ϕ tworzymy trójkąt, którego boki utożsamiamy z l_1, l_2, l_3 i łączymy wykluczającymi połączeniami z x_{jT} albo x_{jF} – tak aby literal odpowiadał odpowiedniej zmiennej lub jej negacji.

Ponadto łączymy w klikę wszystkie wierzchołki trójkątów oraz wierzchołki B, C .



Rysunek 2: Definicja wykluczających się krawędzi.

W powstałym grafie G istnieje cykl Hamiltona wtedy i tylko wtedy gdy ϕ jest spełniona.

Udowodnijmy powyższe twierdzenie. Możemy bez straty ogólności założyć, że ewentualny cykl Hamiltona zaczyna się w wierzchołku A , kończy natomiast w C . Ścieżka przechodzi przez poddrzewo opisane na rysunku 1 definiując walucję. Gdy dojdziemy do wierzchołka 2, należy przejść przez trójkąty, po czym, kończąc, przejść do wierzchołka C i domknąć cykl.

Powstałe wartościowanie spełnia ϕ . By to pokazać, należy zauważyć, że przez wszystkie podgrafy wykluczające zachowują się tak, jakby dokonywały wyboru dokładnie jednej krawędzi. Stąd cykl wiedzie przez bok trójkąta odpowiadający literalowi wtedy i tylko wtedy, gdy literal jest równy false, a to z kolei powoduje, że nie ma klauzul, których wszystkie trzy literala byłyby fałszywe. Formuła ϕ jest więc spełniona.

Przypuśćmy teraz, że istnieje wartościowanie spełniające formułę ϕ . Istnienie cyklu wynika z faktu, że cykl może przebiegać przez podgraf pokazany na rysunku 1 zgodnie z danym wartościowaniem. Następnie pozostaje jeszcze reszta grafu będąca ogromną kliką, z pewnymi wierzchołkowo rozłącznymi ścieżkami długości co najwyżej dwa. Ponieważ dostępne są wszystkie możliwe krawędzie, można więc łatwo podłączyć potrzebne kawałki w ścieżkę i uzupełnić cały cykl Hamiltona tak, by ostatecznie kończył się wierzchołkiem C i domykał się do A .

□

Zadanie: Zredukuj problem HAMILTON CYCLE do problemu TSP(D).

Rozwiązanie: Tworzymy n miast (po jednym dla każdego wierzchołka grafu). Kładziemy odległość między miastami i, j równą 1 gdy cykl Hamiltona zawiera krawędź $\{v_i, v_j\}$ oraz równą 2 w przeciwnym przypadku. Ustalamy limit dla komiwojażera $k = n$.

Łatwo jest zauważyć, że komiwojażer zdąży przejść przez wszystkie miasta w czasie $k = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy graf G zawiera cykl Hamiltona (komiwojażer przechodzi właśnie po tym cyklu).

□